Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Carl Köhler** (1855 – 1932)

Titel: **Zur Theorie des F^2-Gebüsches mit reellem Poltetraeder und des Kegelschnitt-Gebüsches**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1913, 5

Im ersten Teil der Arbeit wird gezeigt, wie sich — nach Herstellung einer eineindeutigen Zuordnung zwischen den in einem F^2-Gebüsch mit reellem Poltetraeder enthaltenen Flächen und den Punkten des Raumes — aus der Lage, die der einer Fläche zugeordnete Punkt in dem durch das Poltetraeder und eine fünfte Ebene geteilten Punktraum einnimmt, die affine Beschaffenheit der Fläche unmittelbar erkennen läßt. — Der zweite Teil beantwortet die Frage nach der affinen Art aller Kegelschnitte, die in einem Kegelschnitt-Gebüsch mit reellem Polarvierseit enthalten sind.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1913, S. XX–XXI)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1913. 5. Abhandlung.

Zur Theorie des F^2-Gebüschs mit reellem Poltetraeder und des Kegelschnitt-Gebüschs mit reellem Polarvierseit

von

C. Koehler
in Heidelberg

Eingegangen am 12. Februar 1913

Vorgelegt von L. Koenigsberger

Heidelberg 1913
Carl Winter's Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 867.

Alle Flächen zweiter Ordnung, die ein gegebenes Tetraeder *ABCD* oder T als Poltetraeder besitzen, bilden ein spezielles *F^2-Gebüsch*[1]; alle Flächen zweiter Klasse, die T zum Poltetraeder haben, bilden eine lineare Mannigfaltigkeit von Flächen, die wir ein spezielles *Φ^2-Gebinde* nennen wollen. Beide einander dualistisch gegenüberstehenden Gebilde enthalten dieselben *nicht entarteten* Flächen, und eine solche ist im allgemeinen eindeutig bestimmt, sobald für sie ein Paar von Polarelementen π, P gegeben ist.

In einer früheren Arbeit[2] habe ich gezeigt, wie man die *projektive* Beschaffenheit einer durch ein reelles T, π und P bestimmten *nicht entarteten* Fläche zweiter Ordnung und ihrer Schnittkurve mit der Ebene π allein aus der Lage von P in bezug auf die vier Seitenebenen von T und die Ebene π erkennen kann. Hier sollen die dort entwickelten Kriterien so erweitert werden, daß sie nicht nur die *projektive*, sondern auch die *parallelmetrische*, also die *affine* Gesamteinteilung liefern für *alle* Flächen des F^2-Gebüschs und des Φ^2-Gebindes mit reellem Poltetraeder (Nr. 1 und 2), sowie für alle Kurven des speziellen Kegelschnitt-Gebüschs mit gemeinsamem Polarvierseit, das als Schnitt des F^2-Gebüschs mit einer Ebene entsteht (Nr. 3–5).

1.

Die Flächen des Φ^2-Gebindes kann man den Punkten P des Raumes dadurch ein-eindeutig zuordnen, daß man eine beliebige, nur mit keiner Ecke von T inzidierende Ebene π als „*Ordnungsebene*" wählt und ihr sukzessive jeden Punkt des Raumes als Pol entsprechen läßt. Die durch P eindeutig bestimmte Fläche Φ_P ist dann nicht entartet — ein Kegelschnitt — ein Punktepaar — ein Doppelpunkt, je nachdem P mit keiner — einer — zwei — drei Seiten von T inzidiert.

---

[1]) Vgl. *K. Meister*, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 34 (1889), p. 6 und *Reye*, Geom. d. Lage, Bd. 3 (4. Aufl.), p. 248.

[2]) Archiv d. Math. u. Phys. III. Reihe, Bd. 6 (1904), p. 95. Die Arbeit soll im Folgenden kurz mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet werden.

Dualistisch entsprechend erhält man mit Hilfe eines „Ordnungspunktes" P eine ein-eindeutige Beziehung zwischen allen Flächen des F^2-Gebüschs und den Ebenen des Raumes.

Man kann aber auch, was sich für die folgende Untersuchung mehr empfiehlt, das F^2-Gebüsch, ebenso wie das Φ^2-Gebinde, nach der Ebene π ordnen, also ebenfalls ein-eindeutig auf den Punktraum beziehen, wenn man nur für seine *entarteten* Flächen die Bedingung, daß P der *Pol* von π sei, fallen läßt[3]) und dafür vorschreibt, daß jede einfach, bzw. zweifach entartete Fläche F_P des F^2-Gebüschs demjenigen mit einer Seite, bzw. Kante von T inzidierenden Punkt P, der die zu der Fläche F_P *perspektiv* liegende Fläche Φ_P des Φ^2-Gebindes bestimmt, zugeordnet sein soll, die vier als Doppelebenen in dem Gebüsch auftretenden Seiten von T aber ihren Gegenecken entsprechen läßt.

Die *projektive* Einteilung der Flächen des Gebüschs und des Gebindes erfolgt nun im wesentlichen nach den Kriterien II und V in 𝔄, denen wir nur eine andere, hier zweckmäßigere Form geben wollen.

Die vier Seiten α, β, γ, δ des Poltetraeders T bilden zusammen mit der Ebene π ein Raumfünfseit P, das den ganzen *projektiven* Raum in folgender Weise zerlegt[4]):

Es entstehen durch die *Raumteilung* P $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \pi)$

1. fünfzehn räumliche Gebiete (fünf „Tetraeder" und zehn „Pentaeder"),

2. in jeder Seite von P sieben ebene Gebiete (vier „Dreiseite" und drei „Vierseite"),

3. auf jeder Kante von P drei lineare Gebiete.

Von den fünfzehn räumlichen Gebieten besitzen vierzehn eine in der Ebene π liegende „Wand", und zwar acht (vier Tetraeder und vier Pentaeder) eine *dreiseitig* begrenzte, sechs (Pentaeder) eine *vierseitig* begrenzte π-Wand, während eines nur von α, β, γ, δ begrenzt ist. Von den sieben Gebieten in einer Seite des Polvierecks[5]) T haben sechs (drei Dreiseite und drei Vierseite), von den drei Gebieten auf einer Kante von T zwei eine *mit* π *inzidierende* Wand.

---

[3]) Diese Bedingung muß fallen, wenn wir die ein-eindeutige Zuordnung von P und F_P *ausnahmslos* aufrecht erhalten wollen, da für eine (in einen Kegel, ein Ebenenpaar, eine Doppelebene) entartende Fläche des Gebüschs jeder ihrer singulären Punkte ein Pol von π ist.

[4]) Vgl. 𝔄, pag. 102 u. 98.

[5]) Damit das Wort „Tetraeder" nicht in zweierlei Sinn gebraucht wird, nennen wir von jetzt an T ein (räumliches) *Polviereck*. (Im Anschluß an *Reye*, Journ. f. Math., Bd. 77, p. 272.)

Wenn wir nun die Punkte einer π-Wand als zu jedem der beiden durch sie begrenzten Gebiete gehörig betrachten, was geschehen soll, solange diese Gebiete nicht als Tetraeder usw. unterschieden werden, so erhalten wir aus $\mathfrak{A}$ unter Benutzung der Raumteilung P[6]) folgende Kriterien für die *projektive Einteilung* aller Flächen des Φ^2-Gebindes und des F^2-Gebüschs:

I. *Die Fläche Φ_P, bzw. F_P ist nicht — einfach — zweifach — dreifach entartet, je nachdem P mit keiner — einer — zwei — drei Seiten von* T *inzidiert.*

Die nicht entartete Fläche $\Phi_P = F_P$ ist nichtgeradlinig, geradlinig oder imaginär, je nachdem P einem von der Ebene π dreiseitig, vierseitig oder nicht begrenzten Gebiet der Raumteilung P $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \pi)$ *angehört.*

Der Kegelschnitt Φ_P (Kegel F_P), bzw. das Punktepaar Φ_P (Ebenenpaar F_P) ist reell oder imaginär, je nachdem der mit einer Seite, bzw. Kante von T *inzidierende Punkt P einem von der Ebene π begrenzten oder nicht begrenzten Gebiet der Raumteilung* P *angehört.*

2.

Die *parallelmetrische* Beschaffenheit brauchen wir nur für die Flächen des Φ^2-Gebindes festzustellen, da dieses in seinen nicht entarteten Flächen mit dem F^2-Gebüsch übereinstimmt, bei den entarteten Flächen des letzteren aber parallelmetrische Unterschiede überhaupt nicht auftreten, solange T lauter *eigentliche* Ecken besitzt (ein „eigentliches" Viereck ist). Ist aber etwa die Ecke A uneigentlich, so ist jeder von A getragene, durch ein mit α inzidierendes P bestimmte Kegel F_P des Gebüschs ein Zylinder, der sich parallelmetrisch wie der zu ihm perspektive Kegelschnitt Φ_P verhält, usf.

Nach $\mathfrak{A}$ (VI und III) haben wir für die *projektive* Beschaffenheit des Schnittes der als *Punktgebilde* aufgefaßten Fläche Φ_P mit der Ebene π die Kriterien:

II. *Der Schnitt von Φ_P und π ist ein reeller oder imaginärer nicht entarteter Kegelschnitt, je nachdem P in einem Pentaeder oder Tetraeder der Raumteilung* P $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \pi)$ *liegt; er ist ein reelles oder imaginäres Geradenpaar, je nachdem P in einem Vierseit oder Dreiseit der Ebene π liegt; er ist ein reelles oder imaginäres Punktepaar, je nachdem P in einem Vierseit oder Dreiseit einer der Ebenen*

[6]) Wo kein Mißverständnis möglich ist, soll P $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \pi)$ kurz mit P bezeichnet werden.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *liegt; er ist endlich ein Doppelpunkt, wenn P mit π und mit einer oder zwei der Ebenen* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *inzidiert.*[7])

Nehmen wir nun zunächst an, daß T nur *eigentliche* Ecken besitze, dann geben uns diese Kriterien, wenn wir uns das Φ^2-Gebinde — statt nach π — speziell nach der uneigentlichen Ebene ϵ_∞ geordnet denken, unmittelbar die *projektive* Einteilung der Schnittkurven unserer Flächen mit ϵ_∞, also die *parallelmetrische* Einteilung für diese Flächen. Wir können sie aber leicht so umformen, daß sie diese Einteilung auch liefern, wenn wir die beliebig gewählte Ebene π als Ordnungsebene beibehalten.

Ist M der Mittelpunkt der Fläche Φ_P des *nach π geordneten* Gebindes, so entsprechen sich P und M in zwei *kollinearen* Räumen Σ_P und Σ_M; denn die mit einer Ebene ρ inzidierenden Punkte P bestimmen eine Φ^2-Scharschar des Gebindes; die ihnen entsprechenden Punkte M inzidieren also ebenfalls mit einer Ebene σ, der zu ϵ_∞ in bezug auf die Scharschar konjugierten Ebene. Die Seiten von T sind die Doppelebenen dieser Kollineation. Außerdem läßt sich die der Ebene ϵ_∞ von Σ_M in Σ_P entsprechende Ebene π', die wir die „*Gegenebene*" von π (in bezug auf T) nennen, einfach konstruieren, indem man ihre Schnittpunkte mit den Kanten von T bestimmt. Fällt nämlich M auf den uneigentlichen Punkt von $|\alpha\beta|$, also P ebenfalls auf diese Kante, so entartet Φ_P in ein eigentlich-uneigentliches Punktepaar, und P ist folglich der zum Punkt $(\alpha\beta\pi)$ konjugierte Punkt in der durch die auf $|\alpha\beta|$ liegenden Ecken C, D von T bestimmten *symmetrischen* Involution, d. h. der Schnittpunkt von π' mit $|\alpha\beta|$ ist bestimmt durch die Streckengleichung

$$(\alpha\beta\pi) \rightarrow C = D \rightarrow (\alpha\beta\pi').^{8)}$$

Da nun in der Kollineation zwischen Σ_P und Σ_M den Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \pi'$ die Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon_\infty$ entsprechen, liegt P in einem *Tetraeder* der Raumteilung P $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \pi')$, wenn M in einem *Tetraeder* von P $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon_\infty)$ liegt, usf. Wenn wir uns

[7]) Wenn P mit einer Kante von T, aber nicht mit π inzidiert, existiert kein Schnitt von Φ_P und π.

[8]) Wenn π' die Gegenebene von π ist, so ist also π auch die Gegenebene von π'. Ferner folgt aus der obigen Konstruktion, daß π und π' immer *dieselben* vier, bzw. drei Tetraeder der durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ hervorgerufenen Raumteilung in einem *Dreiseit*, bzw. *Vierseit* schneiden müssen. Wenn also P in einem von π *dreiseitig* begrenzten Gebiet der Raumteilung P $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \pi) \equiv$ P liegt, so liegt es auch in einem von π' *dreiseitig* begrenzten Gebiet von P $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \pi') \equiv$ P' usw. — d. h. in dem Kriterium I für das *nach π geordnete* Gebinde darf die Raumteilung P durch P' ersetzt werden, ohne daß es seine Gültigkeit verliert.

also die Fläche Φ_P zunächst durch ϵ_∞ und M bestimmt denken, so ergibt sich aus II sofort:

Der Schnitt von Φ_P und ϵ_∞ ist ein reeller oder imaginärer nicht entarteter Kegelschnitt, je nach dem P in einem Pentaeder oder Tetraeder der Raumteilung P (α, β, γ, δ, π') liegt, usf.

Hiernach läßt sich die parallelmetrische Beschaffenheit der Fläche Φ_P allein aus der Lage von P in bezug auf die fünf Ebenen α, β, γ, δ und die Gegenebene π' von π bestimmen, und wir erhalten für die *parallelmetrische Einteilung* des *nach* π *geordneten* Φ^2-Gebindes mit reellem *eigentlichem* Polviereck die Kriterien:

III. *Die Fläche* Φ_P *ist ein Hyperboloid oder Ellipsoid, je nachdem* P *in einem Pentaeder oder Tetraeder der Raumteilung* P (α, β, γ, δ, π') *liegt; sie ist ein geradliniges oder nichtgeradliniges Paraboloid, je nachdem* P *in einem Vierseit oder Dreiseit der Ebene* π' *liegt.*[9]) — Φ_P *ist eine Hyperbel oder Ellipse, je nachdem* P *in einem Vierseit oder Dreiseit einer der Ebenen* α, β, γ, δ *liegt; eine Parabel, wenn* P *in* π' *und zugleich in* α, β, γ *oder* δ *liegt.* — Φ_P *ist ein eigentlich-uneigentliches oder ein eigentliches Punktepaar (bzw. eigentlicher Doppelpunkt), je nachdem das auf einer Kante des Polvierecks liegende* P *mit* π' *inzidiert oder nicht.*

Hieraus aber und aus I, worin nach Anm. 8 pag. 6 die Ebene π durch ihre Gegenebene π' ersetzt werden darf, ergibt sich die *affine Gesamteinteilung* der Flächen des Φ^2-Gebindes:

IV. *Die Fläche* Φ_P *ist ein reelles oder imaginäres Ellipsoid, bzw. ein nichtgeradliniges oder geradliniges Hyperboloid, je nachdem* P *in einem von* π' *begrenzten oder nicht begrenzten Tetraeder, bezw. in einem von* π' *dreiseitig oder vierseitig begrenzten Pentaeder der Raumteilung* P ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \pi'$) *liegt; sie ist ein nichtgeradliniges oder geradliniges Paraboloid, je nachdem* P *in einem Dreiseit oder Vierseit der Ebene* π' *liegt.*

Φ_P *ist eine reelle oder imaginäre Ellipse, bezw. eine Hyperbel, je nachdem* P *in einem von* π' *begrenzten oder nicht begrenzten Dreiseit, bzw. in einem Vierseit einer der Ebenen* α, β, γ, δ *liegt, — eine Parabel, wenn* P *mit* π' *und zugleich mit* α, β, γ *oder* δ *inzidiert.*

Φ_P *ist ein reelles oder imaginäres eigentliches, bzw. eigentlich-uneigentliches Punktepaar, je nachdem* P *auf einer Kante des Pol-*

---

[9]) Die beiden Arten von Paraboloiden unterscheiden sich auch parallelmetrisch, beide Arten von Hyperboloiden und Ellipsoiden nur projektiv!

vierecks T *in einem von* π′ *begrenzten oder nicht begrenzten Gebiet, bzw. in* π′ *selbst liegt, — endlich ein Doppelpunkt, wenn* P *mit einer Ecke von* T *zusammenfällt.*[10])

Aus IV ergibt sich offenbar die affine Beschaffenheit *jeder* nicht entarteten Fläche zweiter Ordnung (Kurve zweiter Ordnung), von der ein beliebiges *eigentliches* Polviereck (Poldreieck) und ein Paar von nicht mit diesem inzidierenden Polarelementen bekannt ist, da dieselbe dem durch das Polviereck bestimmten Gebinde (der durch das Poldreieck bestimmten Scharschar) angehört.

Bewiesen ist das Kriterium IV nur für Φ^2-Gebinde mit *eigentlichem* Polviereck T und kann auch in der gegebenen Form nur auf solche angewandt werden. Man kann ihm aber eine Form geben, in der es auch noch anwendbar ist, wenn T *uneigentliche* Ecken besitzt.

Da in P (α, β, γ, δ, π′) das von π′ nicht begrenzte Tetraeder mit den vier von π′ dreiseitig begrenzten Pentaedern eine Seite, mit den sechs von π′ vierseitig begrenzten Pentaedern nur eine Kante, mit den vier auch von π′ begrenzten Tetraedern nur eine Ecke gemein hat, da ferner (vgl. Anm. 8, p. 6) das *von* π′ *nicht begrenzte* Tetraeder der Raumteilung P′ ≡ P (α, β, γ, δ, π′) auch der Raumteilung P ≡ P (α, β, γ, δ, π) als *von* π *nicht begrenztes* Tetraeder angehört, so können wir, wenn wir uns der Kürze halber auf nicht entartete Flächen zweiter Ordnung beschränken, IV auch so aussprechen:

V. *Eine durch ein reelles Polviereck* T *und ein Paar von Polarelementen* π, P *bestimmte nicht entartete Fläche zweiter Ordnung ist ein imaginäres Ellipsoid, wenn* P *in dem von* π *nicht begrenzten Tetraeder* T_0 *der Raumteilung* P *liegt; sie ist ein nichtgeradliniges Hyperboloid, ein geradliniges Hyperboloid oder ein reelles Ellipsoid, je nachdem* P *in einem Gebiet der Raumteilung* P′ *liegt, das mit* T_0 *eine Seite, nur eine Kante oder nur eine Ecke gemein hat; sie ist endlich ein Paraboloid, wenn* P *mit* π′ *inzidiert, und dieses ist nichtgeradlinig oder geradlinig, je nachdem* P *in einem von* π *dreiseitig oder vierseitig begrenzten Gebiet der Raumteilung* P *liegt.*

---

[10]) Da die Flächen Φ_P, deren P in einer Ebene von T liegt, eine Kegelschnitt-Scharschar bilden, ist hierdurch auch die *affine Einteilung* der Kurven C_P *einer nach einer Geraden* p *geordneten Kegelschnitt-Scharschar* (und des zugehörigen *Kegelschnitt-Bündels*) *mit gemeinsamem Poldreieck* vollzogen. Über die Art von C_P entscheidet allein die Lage von P in bezug auf die Seiten des Poldreiecks und die „Gegengerade“ p' von p (in bezug auf das Poldreieck).

Wir übergehen den leicht zu führenden Beweis dafür, daß V auch gilt, wenn T uneigentliche Ecken besitzt, und bemerken nur, daß in diesem Fall die Gegenebene π' von π mit *jeder uneigentlichen* Ecke von T inzidieren muß, und daß infolgedessen der Raum, je nachdem T eine, zwei oder drei uneigentliche Ecken besitzt, durch P' nur noch in vierzehn, zwölf oder acht Gebiete geteilt wird, während ihn P immer in fünfzehn Gebiete zerlegt, da π mit keiner Ecke von T inzidieren darf, wenn die betr. Fläche durch π, P und T bestimmt sein soll.

Die nicht entarteten Flächen des Φ^2-Gebindes (und des F^2-Gebüschs) mit gemeinsamem Polviereck T zerfallen somit, wenn T *nur eigentliche* Ecken hat, in fünfzehn „Teil-Gebinde" von Zentralflächen und sieben „Teil-Scharscharen" von Paraboloiden. Eines der Teil-Gebinde besteht aus den imaginären Ellipsoiden E_i, vier enthalten die nichtgeradlinigen Hyperboloide H_n, sechs die geradlinigen Hyperboloide H_g und vier die reellen Ellipsoide E_r des Gebindes. Vier der Teil-Scharscharen bestehen aus nichtgeradlinigen Paraboloiden P_n, drei aus geradlinigen Paraboloiden P_g.

Wenn T *eine* uneigentliche Ecke besitzt, reduziert sich die Anzahl der Teil-Gebinde auf vierzehn (ein E_i-, vier H_n-, sechs H_g-, drei E_r-Gebinde), die der Teil-Scharscharen auf sechs (drei P_n- und drei P_g-Scharscharen); wenn T *zwei* uneigentliche Ecken hat, auf zwölf (ein E_i- vier H_n-, fünf H_g-, zwei E_r-Gebinde) und vier (zwei P_n- und zwei P_g-Scharscharen); wenn endlich T *drei* uneigentliche Ecken besitzt, auf acht (ein E_i-, drei H^n-, drei H_g-, ein E_r-Gebinde), und das Φ^2-Gebinde enthält dann keine Paraboloide mehr.

In *allen* Fällen ist ein stetiger Übergang von dem E_i- zu einem H_g-, bzw. E_r-Gebinde nur durch die Punktepaare, bezw. Doppelpunkte des Gebindes möglich. Dagegen bildet den stetigen Übergang von dem E_i- zu einem H_n-Gebinde eine Teil-Scharschar von imaginären Ellipsen des Gebindes, — von einem E_r- zu einem H_g-Gebinde eine Teil-Scharschar von reellen Ellipsen, — von einem H_g- zu einem H_n-Gebinde eine Teil-Scharschar von Hyperbeln. Außerdem findet, falls T nicht *drei* uneigentliche Ecken hat, ein solcher Übergang von einem H_n- zu einem E_r-Gebinde durch eine P_n-Scharschar statt, während sechs, bezw. vier H_g-Gebinde paarweise durch eine der P_g-Scharscharen des Gebindes verbunden sind.

3.

Jedes Kegelschnitt-Gebüsch (KS-Gebüsch) mit gemeinsamem Polarvierseit $a\,b\,c\,d$ oder Θ kann als Schnitt eines F^2-Gebüschs mit gemeinsamem Polviereck T betrachtet werden. Man braucht nur durch die Geraden a, b, c, d irgend vier sich nicht in demselben Punkt schneidende Ebenen α, β, γ, δ zu legen, dann bestimmen deren Schnittpunkte (als Polviereck aufgefaßt) jedesmal ein solches F^2-Gebüsch. Es gibt also ∞^4 F^2-Gebüsche, als deren Schnitt das gegebene KS-Gebüsch entsteht. Wählt man eines dieser F^2-Gebüsche und ordnet es nach der Ebene π des KS-Gebüsches, so ist mit jenem auch dieses ein-eindeutig auf den Punktraum bezogen, und jede seiner Kurven C_P ist als Schnitt der Fläche F_P mit der Ebene π bestimmt.

Die Frage nach der affinen Art der Kurven des KS-Gebüschs ist also identisch mit der Frage nach der affinen Art der Kurven, die ein F^2-Gebüsch mit Polviereck aus einer Ebene ausschneidet.

Nennen wir ein Polarvierseit von C_P, das aus einem Polardreieck und einer beliebigen Geraden besteht, ein „*unechtes*", jedes andere ein „*echtes*" Polarvierseit, so ist Θ echt oder unecht für den Kegelschnitt C_P, je nachdem er von einer nicht entarteten oder von einer entarteten Fläche F_P ausgeschnitten wird. Die Kegelschnitte C_P mit *unechtem* Θ werden also von den vier im F^2-Gebüsch enthaltenen Kegelbündeln mit den Spitzen A, B, C, D ausgeschnitten und bilden folglich vier KS-Bündel. Jedes derselben ist ein KS-Bündel mit gemeinsamen Poldreieck. Die affine Einteilung seiner Kegelschnitte erfolgt somit nach den Kriterien von Nr. 2 (vgl. Anm. 10, p. 8).

Zu untersuchen sind demnach nur noch *die* Kurven des KS-Gebüschs, für die Θ ein *echtes* Polarvierseit ist, also die Kurven, die von den *nicht entarteten* Flächen des F^2-Gebüschs, also auch von den nicht entarteten Flächen des zu diesem gehörigen Φ^2-Gebindes aus π ausgeschnitten werden, d. h. diejenigen C_P, deren P mit keiner Seite von T inzidiert.

Die unter diesen C_P auftretenden Parabeln (die ev. im Geradenpaare mit uneigentlichem Schnittpunkt entarten) sind die Schnitte derjenigen Flächen Φ_P des Φ^2-Gebindes, die die uneigentliche Gerade l_∞ von π berühren oder enthalten, für die also l_∞ entweder nur eine Berührungsebene trägt oder eine Erzeugende ist. Um diese Flächen zu bestimmen, fragen wir allgemeiner:

Wann trägt eine beliebig gegebene Gerade l des Raumes zwei reelle — zwei imaginäre — nur eine Berührungsebene an die Fläche Φ_P und wann ist l eine ihrer Erzeugenden?

4.

Alle Flächen des Φ^2-Gebindes, die eine Ebene ρ berühren, bilden eine Φ^2-Scharschar, für die die Pole P von π mit der in bezug auf die Scharschar zu π konjugierten Ebene σ inzidieren. Jeder Ebene ρ des Raumes (und den sieben mit ihr im Φ^2-Gebinde assoziierten Ebenen) entspricht also *eine* Ebene σ: die (zu ρ gehörige) „*Polebene*“ (von π).[11])

Für die einander so zugeordneten Ebenen ρ und σ besteht der Satz[12]):

Die den Ebenen ρ eines Ebenenbüschels, dessen Achse l kein Hauptstrahl des Φ^2-Gebindes[13]) ist, entsprechenden Polebenen σ bilden die Berührungsebenen eines nicht entarteten Kegels zweiter Ordnung, der dem Polviereck T umschrieben ist.

Wir nennen diesen Kegel den (zu der Geraden l gehörigen) „*Polkegel*“ K_l (von π). Seinen Berührungsebenen σ entsprechen die Ebenen des Büschels $l[\rho]$ ebenfalls *eindeutig*; denn wenn von den einer Ebene σ entsprechenden acht assoziierten Ebenen ρ mehr als eine durch l ginge, müßte l ein Hauptstrahl sein. Da nun die Berührungsebenen σ von K_l alle Punkte P enthalten, deren Flächen Φ_P durch l gehende *reelle* Berührungsebenen ρ besitzen, da ferner ein Raumpunkt P mit zwei, keiner, einer oder (wenn er mit der Spitze P_0 von K_l zusammenfällt) mit allen Berührungsebenen von K_l inzidieren kann, gilt somit auch der Satz:

VI. *Eine Gerade l, die kein Hauptstrahl ist, trägt zwei reelle, zwei imaginäre oder nur eine, bzw. ein Büschel von Berührungs-*

---

[11]) Da die durch die Ebene ρ und ihren Berührungspunkt R bestimmte Fläche der Φ^2-Scharschar, wenn R auf eine Kante von T — etwa auf | AB | — fällt, in ein R enthaltendes Punktepaar entartet, müssen σ und π diese Kante in zwei *konjugierten* Punkten der durch das Paar A, B und den Doppelpunkt R bestimmten Involution schneiden. Man kann somit das einem ρ entsprechende σ durch Bestimmung seiner Schnittpunkte mit den Kanten von T stets konstruieren. — Ist speziell $\rho = \epsilon_\infty$, so ergibt sich σ als die *Gegenebene* π' von π (in bezug auf T).

[12]) Vgl. *Reye*, Geom. d. Lage, Bd. 3 (4. Aufl.), p. 148, wo der zu dem obigen dualistische Satz für das *allgemeine* F^2-Gebüsch bewiesen ist, und p. 250.

[13]) Ein „*Hauptstrahl*“ des *Gebindes* ist eine Gerade, die entweder mit zwei Gegenkanten oder mit einer Seite von T inzidiert.

ebenen[14]) *der Fläche* Φ_P, *je nachdem* P *außerhalb, innerhalb oder auf der Fläche, bzw. Spitze des Polkegels* K_l *liegt.*

Dieser Satz läßt sich noch in eine Form bringen, in der er auch für die Hauptstrahlen des Gebindes gültig bleibt.

Sei zunächst l ein *zwei Gegenkanten von* T — etwa $|AB| = k_1$ und $|CD| = k_2$ — *schneidender* Hauptstrahl, dann müssen, weil *alle* Ebenen des Büschels $l[\rho]$ durch die Punkte $(l k_1)$ und $(l k_2)$ gehen, *alle* ihnen entsprechenden Polebenen σ die Kanten k_1 und k_2 in denselben Punkten treffen (vgl. Anm. 11, p. 11), also durch dieselbe Gerade l_0 gehen. Die den Ebenen von $l[\rho]$ entsprechenden Polebenen σ gehören somit jetzt alle einem Ebenenbüschel mit der Achse l_0 an. Wie früher entspricht jedem ρ *ein* σ; jedem σ entsprechen aber jetzt *zwei* (assoziierte) Ebenen im Büschel $l[\rho]$, die durch die Ebenen $[l k_1] = \rho_1$ und $[l k_2] = \rho_2$ harmonisch getrennt werden, also nur zusammenfallen für $\rho = \rho_1$ und $\rho = \rho_2$. Diese zu ρ_1 und ρ_2 gehörigen Polebenen σ sind $\sigma_1 = [l_0 k_1]$ und $\sigma_2 = [l_0 k_2]$; denn, weil ρ_1 durch A geht, muß auch σ_1 durch A gehen, usf.

In σ_1 oder σ_2 liegen demnach die Punkte P, deren Flächen Φ_P *nur eine* durch l gehende Berührungsebene besitzen, auf $l_0 = |\sigma_1 \sigma_2|$ aber diejenigen P, für die die Fläche Φ_P die Gerade l als Erzeugende enthält. Der in VI zu l gehörige Polkegel K_l entartet somit hier in das Ebenenpaar σ_1, σ_2, das wir deshalb auch mit K_l bezeichnen. Die beiden Gebiete, in die der *projektive* Raum durch dieses Ebenenpaar K_l zerlegt wird, unterscheiden sich dadurch, daß das eine das *von* π *nicht begrenzte* Tetraeder der Raumteilung P$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \pi)$ enthält. Wir wollen seine Punkte als *innere* Punkte, die in dem anderen Gebiet gelegenen als *äußere* Punkte des Paares K_l bezeichnen, weil sie hier dieselbe Rolle spielen wie die inneren, bzw. äußeren Punkte des Polkegels K_l in Satz VI.

Nehmen wir nämlich in einer beliebigen Ebene σ des Büschels l_0 *den* Punkt P, in welchem sie die Kante $|AC|$ von T schneidet, so bestimmt dieser ein reelles, bzw. imaginäres *Punktepaar* Φ_P, je nachdem er außerhalb oder innerhalb des Paares K_l liegt, und es gehört demnach zu *jedem* P in dieser Ebene σ eine Fläche Φ_P, die durch l zwei reelle, bzw. imaginäre Berührungsebenen schickt; das eine oder das andere tritt also für irgend ein Φ_P ein, je nachdem P ein äußerer oder ein innerer Punkt von K_l ist.

---

[14]) D. h. l ist eine Erzeugende.

Genau so findet man, daß an Stelle des i. a. zu l gehörigen Polkegels ein Ebenenpaar tritt, wenn l ein *mit einer Seite von* T *inzidierender* Hauptstrahl ist.[15]) Somit haben wir statt VI jetzt den Satz:

VII. *Eine Gerade l trägt zwei reelle oder zwei imaginäre Berührungsebenen der Fläche Φ_P des Φ^2-Gebindes, je nachdem P ein äußerer oder innerer Punkt des (für Hauptstrahlen l in ein Ebenenpaar entartenden) Polkegels K_l ist; l ist eine Tangente, bzw. Erzeugende der Fläche Φ_P, wenn P mit einem nicht singulären, bezw. singulären Punkt von K_l zusammenfällt.*

Ist nun Φ_P eine nichtgeradlinige Fläche, liegt also P nach I in einem von π *dreiseitig* begrenzten Gebiet von P, so trägt l mit zwei reellen (imaginären) Berührungsebenen zugleich zwei imaginäre (reelle) Flächenpunkte. Ist dagegen Φ_P geradlinig oder imaginär, sein P-Gebiet also von π *nicht dreiseitig* begrenzt, so sind seine von l getragenen Berührungsebenen und Flächenpunkte zugleich reell, bzw. imaginär. Somit ergibt sich aus VII:

VIII. *Eine Gerade l schneidet die Fläche Φ_P in zwei reellen, bzw. imaginären Punkten, wenn P innerhalb (außerhalb) des Polkegels K_l in einem von π dreiseitig (nicht dreiseitig) begrenzten, bezw. nicht dreiseitig (dreiseitig) begrenzten Gebiet der Raumteilung* P $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \pi)$ *liegt; l ist Tangente, bezw. Erzeugende von Φ_P, wenn P ein nichtsingulärer, bzw. singulärer Punkt von K_l selbst ist.*

Wenn l speziell *eine Gerade der Ebene* π ist, so gehört π nicht nur zu den Ebenen ρ, sondern auch zu den Ebenen σ und entspricht sich selbst. l ist dann eine Tangente oder Erzeugende der Fläche Φ_P, wenn P mit l selbst inzidiert, d. h. l ist ein Strahl des Polkegels und π seine Berührungsebene, bzw. es ist die Achse l_0 des Ebenenpaares K_l. Der Kegel K_l kann also in diesem speziellen Fall, der in Nr. 5 eintreten wird, einfach dadurch bestimmt werden, daß man zu *einer* Ebene ρ das entsprechende σ konstruiert. Dadurch erhält man seine Spitze $P_0 = (l\,\sigma)$ und hat somit, da er dem Polviereck T umschrieben ist, in l und den vier P_0 mit den Ecken von T verbindenden Geraden fünf seiner Strahlen. — Das zu einem Hauptstrahl l gehörige Ebenenpaar K_l aber verbindet jetzt l mit den beiden diese Gerade schneidenden Gegenkanten von T, bzw. mit der l enthaltenden Seite von T und ihrer Gegenecke, es

---

[15]) Inzidiert l mit der Seite α von T, so sind die beiden Ebenen, in die K_l entartet, $\sigma_1 = \alpha$ und $\sigma_2 = [l_0 A]$, wo sich l_0 wieder nach Anm. 11, p. 11 konstruieren läßt.

ist also mit l und T zugleich gegeben. Die von uns als *innere* Punkte des Paares K_l definierten Punkte liegen jetzt in demjenigen der beiden von K_l begrenzten Raumteile, der die Ebene π *nicht* enthält, d. h. P ist ein innerer oder äußerer Punkt des Paares K_l je nachdem er von π durch K_l getrennt wird oder nicht.

Wir bemerken noch, daß, *falls* l *mit* π *inzidiert*, der zu einer Berührungsebene σ gehörige Strahl des Kegels K_l von der ihr entsprechenden Ebene ρ des Büschels l aus ihr ausgeschnitten wird.

5.

Aus Satz VIII ergibt sich, wenn wir ihn auf *die uneigentliche Gerade* l_∞ *der Ebene* π anwenden, direkt die parallelmetrische Einteilung aller von den *nicht entarteten* Flächen Φ_P des Φ^2-Gebindes aus π ausgeschnittenen Kurven C_P, d. h. derjenigen Kegelschnitte des von uns betrachteten *KS*-Gebüschs, die das Vierseit Θ als *echtes* Polarvierseit besitzen.

Der zu l_∞ gehörige Polkegel enthält l_∞ als Strahl und π als dessen Berührungsebene. Ein zweiter Strahl ergibt sich als Schnittlinie der uneigentlichen Ebene ϵ_∞ des Büschels l_∞ mit der ihr entsprechenden Ebene σ, d. h. mit der Gegenebene π' von π in bezug auf T (vgl. Anm. 11 p. 11); also ist $g_\infty = |\epsilon_\infty \pi'|$ dieser Strahl und π' seine Berührungsebene. Der zu l_∞ gehörige Polkegel ist somit ein *hyperbolischer Zylinder*, der π und π' als Asymptotenebenen besitzt und sich aus diesen und einem der vier seine Spitze mit den Ecken von T verbindenden Kegelstrahlen leicht konstruieren läßt.

Dieser „zu der Ebene π gehörige *Polzylinder*" entartet, wenn l_∞ ein Hauptstrahl, also π zu zwei Gegenkanten, bzw. zu einer Seite von T parallel ist, in das zu π parallele Ebenenpaar, das diese Gegenkanten, bzw. diese Seite von T und ihre Gegenecke enthält, und sein *inneres* Gebiet ist dadurch definiert, daß es die Ebene π *nicht* enthält.

Da sich nun aus dem auf l_∞ angewandten Satz VIII direkt ergibt, wann diese Gerade die Fläche Φ_P, also auch die von ihr auf π ausgeschnittene Kurve C_P reell oder imaginär schneidet oder berührt, so ist durch ihn die *parallelmetrische* Art dieser Kurve bestimmt, während über ihre *projektive* Beschaffenheit Satz II Auskunft erteilt. Aus beiden Sätzen erhält man somit für alle diejenigen Kegelschnitte C_P eines durch ein gemeinsames Polarvierseit

Θ bestimmten *KS*-Gebüschs, für die Θ ein *echtes* Polarvierseit ist, die *affine Gesamteinteilung:*

IX. *Der Kegelschnitt C_P ist eine imaginäre Ellipse, wenn P in einem Tetraeder der Raumteilung* $\mathsf{P}\,(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \pi)$ *liegt; er ist eine reelle Ellipse, bzw. eine Hyperbel, wenn P innerhalb (außerhalb) des zur Ebene π gehörigen Polzylinders in einem von π vierseitig (dreiseitig) begrenzten, bzw. dreiseitig (vierseitig) begrenzten Pentaeder von* P *liegt; er ist eine Parabel, wenn P mit dem Polzylinder, aber nicht mit π inzidiert.*

C_P ist ein imaginäres oder reelles Geradenpaar, je nachdem P in einem Dreiseit oder Vierseit der Ebene π liegt, und dieses ist nicht parallel oder parallel, bzw. eigentlich-uneigentlich, je nachdem P ein eigentlicher oder uneigentlicher Punkt von π ist, bzw. mit der Spitze des Polzylinders zusammenfällt.

Wie wir schon gesehen haben, erfolgt die Einteilung derjenigen Kegelschnitte des *KS*-Gebüschs, für die Θ ein *unechtes* Polarvierseit ist, nach den sich aus Anm. 10, pag. 8 ergebenden Kriterien. Es ist also jetzt die affine Einteilung *aller* Kegelschnitte des durch ein reelles Polarvierseit bestimmten speziellen *KS*-Gebüschs vollzogen.